

TR-S1-001

動態書基本理論之研究

鄭 國 揚

* 本計畫承國家科學研究委員會補助

計畫編號： NSC-69E-0404-01(02)

執行期限： 68.年12月1日至69.年11月30.日

計畫金額： NT\$157,200.00

兼任助理
研究人員：王苑華（助教級，自68.年12月1日至69.年8月31日）
曾耀正（助教級，自68.年12月1日至69.年6月30日）
丁之侃（助教級，自69.年9月1日至69.年11月30日）
王逸民（助教級，自69.年7月1日至69.年11月30日）

中研院資訊所圖書室



3 0330 03 000005 8

日期：中華民國七十年三月

0005

FOR REFERENCE

NOT TO BE TAKEN FROM THIS ROOM

書 考 參
借 外 不

動態畫基本理論之研究

鄭 國 揚

* 本計畫承國家科學研究委員會補助

計畫編號：NSC-69E-0404-01(02)

執行期限：68.年12.月1日至69.年11.月30.日

計畫金額：NT\$157,200.00

兼任助理
研究人員：王苑華（助教級，自68.年12.月1日至69.年8.月31.日）
曾耀正（助教級，自68.年12.月1日至69.年6.月30.日）
丁之侃（助教級，自69.年9.月1日至69.年11.月30.日）
王逸民（助教級，自69.年7.月1日至69.年11.月30.日）

日 期：中華民國七十年三月

摘 要

本篇報告提出一種應用朦朧近似理論定義電腦動畫，以及一種互作用式電腦圖形法產生及修正動畫的方法，這種方法僅需使用者畫出單動作的前後二張圖，而讓系統自動產生中間的圖畫，此法的整個觀念是建立在動畫問題的定義，從而採用了B軟楔理論及演算法，朦朧集合論及朦朧程式，以及靜態和動態畫的圖形顯像，除此而外，本報告亦提出朦朧近似理論在解人類對曲線形狀官感上的應用。

ABSTRACT

In this report, an applied fuzzy approximation theoretic approach to the definition of computer animated drawings and an interactive computer graphics method for generating and modifying animated drawings are presented. The method requires the user only to draw the initial and final pictures respectively to define the boundary of a simple dynamic motion, and let its mechanism generate the rest of the intermediate pictures automatically. The whole idea of this approach is based upon the formulation for the problem of computer animated drawings, from which the spline theory and algorithms, fuzzy sets and fuzzy programs, and static and dynamic graphics displays are employed to develop the method. In addition, the application of fuzzy approximation theory to human perception of curve shapes is also presented.

緒 言

採用電腦產生動畫的觀念早就被採用 [1 -4] 在現有電腦動畫系統中，有的用類比計算機 (Analog Computer) 有的用數值控制機 (NC Machine) 有的用數位計算機 (Digital Computer) 產生動畫，各種不同的技巧都提及電腦和動畫，讓人迷惑的一點的是：到底什麼叫做電腦動畫？從國外的雜誌刊物裏可以看出動畫的定義至今未明，目前有的僅是產生動畫的某些特定的技巧而已，問題是這些技巧是否能產生動畫的真意？我們如何來評估一種技巧的優劣？解答上述問題的首要工作在於給電腦動畫一個明確的定義。

為什麼電腦動畫那麼困難下定義？因為它牽涉到逼真性的問題，逼真性的品鑑又因人而異，雖然吾人可用朦朧集合 (Fuzzy Set) 理論分析說明，但畢竟這種歸屬於形而上藝術的境界很難 (或者根本不可能) 用數學式表示的。幸好，從電腦系統設計的觀點看，沒有確定的數學式這件事並不會使整個系統的規劃束手無策，吾人只要在軟體系統的設計上採用可接受朦朧指令的人機交談式的作業系統，那麼上述的缺陷可獲致某種程度的改善，由於使用人是藝術家，改善的程度跟藝術家的素養成正比例。

研究電腦動畫的意義何在？從教育的觀點來說，電腦動畫能快速產生動態圖形，並可即時驗證及修改動畫，對動畫藝術的訓練或教學極為適合，況且未來教學的趨勢將是採用電化教室，教材必須要生動而且容易被接受，圖形是最為人類所能接受的抽象語言，畢竟人類是先認知圖形後才學會人造的語言的，因此，電腦動畫的研究除了可以讓我們更深入地瞭解圖形變化的意義外，尚可將人們對圖形的想像 (或創作) 過程電腦化。

電腦動畫的用途何在？最直觀的應用是卡通製作，每秒需產 24 張圖畫是相當可觀的巨作，若能用電腦產生動畫則可以大幅度地減少畫圖的時間，況且電腦快速發展的結果，成本大幅降低，採用電腦製作卡通不但可增加製作的速度，且可減低成本。其次，和卡通製作類似的應用是美工設計，譬如玩具工廠要設計一個人物造型，有時需一再更改才能得到滿意的結果，若用電腦動畫的方法則這項塑型的工作可以線上即時 (On-Line Real Time) 完成，而且有多種選擇的餘地。更高級的軟體系統是將電腦動畫和工程模擬的程式系統結合，則其應用將更為廣泛，例如在 CAI (Computer Aided Instruction) 上電學原理可以用圖形顯現磁場和電場的變化將更為生動而且容易瞭解，材料力學可以用圖形顯示材料受撞擊時的變形過程，...。可以預想得知，電腦動畫的研究是何等重要！

電腦動畫的研究是多方面的，有描述圖形的語言規則法，有圖形資料庫的設計法，有圖形變化演算法，... 等問題值得探究。本文擬從最基本的定義開始，其次是從動畫和最新近似理論間的關係中，如何推演可自動產生動畫的方法，以及如何引進朦朧集合理論，用在修改動畫增高逼真性的方法，最後提出應用朦朧近似理論 (Applied Fuzzy Approximation Theory) 的觀念及其在圖形整順上的應用，更進一層的系統規劃，動畫模式，以及圖形描述語言則將留待未來研究。

電腦動畫的定義

爲了便於說明動畫產生的過程，讓我們參看圖一（脚步的移動），很明顯地，動畫可以分解成許多細部的動作，每個細部的動作構成單方向的變化，譬如圖一的動畫可細分成①至②及②至③的單向圖形變化，換言之，如果將圖上一點的時間變化繪出曲線，則單向漸增（漸減）的部份就構成該動畫的一個細部動作，爲簡便計，我們稱一個細部動作為“單動作”依照電腦的術語來講，一個動畫就是一個“程序”（PROCEDURE），其中的任一單動作就是該程序裏的一個 Begin...End 的 Nested Block，若一動畫有 n 個單動作，則對應此動畫的程序有 n 個 Begin...End 的 Nested Blocks，其中

$$\text{End}(i \text{ th Nested Block}) = \text{Begin}(i+1 \text{ th Nested Block}), i > n$$

所以電腦動畫可以經由 Structured Programming 來建造，只要它的每個單動作可以經由“動畫演算法”產生，換言之，只要我們給每個單動作的第一張（Begin）圖畫及最後一張（End）圖畫，若“動畫演算法”可以自動產生中間過程的圖畫，那麼動畫就可以用 Structured Program 產生。

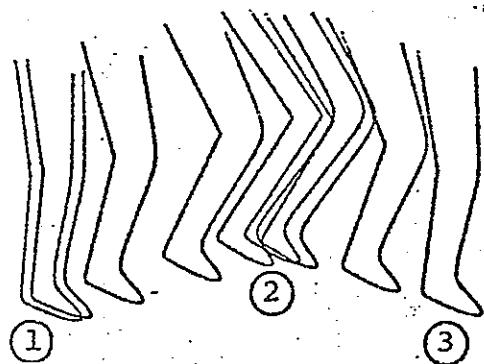


圖 一

問題是：動畫演算法所產生之中間過程的圖畫，它們所構成圖形變化的逼真性滿意嗎？令一個單動作經某一個動畫演算法 α 處理後所產生的圖畫爲 $\{S_k\}$ ， $k = 1, \dots, l$ ，其中 S_1 和 S_l 爲已知的第一張和最後一張的圖畫，這些圖畫所構成的動畫用 $\int_{\alpha} S_k$ 表示，用 $\xi \in [0, 1]$ 表示逼真性的滿意程度， $\xi = 1$ 表示絕對滿意， $\xi = 0$ 表示絕對不滿意， $0 < \xi < 1$ 表示具有程度上的滿意，若演算法是可調的（經人機交談的作業方式），亦即單動作的圖畫有很多的方式產生，故對一組圖畫言，它們是經某個演算法（或方式）所產生，則我們可以說某些動畫演算法所產生之連續畫面所構成逼真性是可接受的，只要它們是屬於下面的集合

$$A = \{ \alpha_i : \xi_i / \int_{\alpha_i} S_k \mid \xi_i \geq \sigma, 0 < \sigma \leq 1 \}$$

其中 σ 是設定的 Threshold Value, 或者是指藝術家的認可值, 他不滿意時, 即指該 $\int \alpha_i S_k$ 不合乎他的要求, 此時 $\sigma > \xi_i!$

從以上的討論, 吾人可以正式給電腦動畫下個定義: 令動畫演算法是一個 Mapping

$$\alpha : S_i \longrightarrow S_f$$

它將單動作的第一張圖片 S_i 投影至最後一張圖片 S_f (產生中間的圖片 $\{S_k\}$, $k = i \dots f$), 而且

$$\alpha \in A$$

電腦動畫的問題即是要找到這樣的一個 α 。

對於某些單動作, 動畫演算法 α 是較容易求得的, 譬如動畫是經由幾何變換 (旋轉, 放大縮小, 平移) 所產生者: 飛機 (或無敵鐵金鋼) 的飛行, 錶針的轉動, . . . 等, 因為它們有一定規律 (或數學運算) 可遵循, 其他屬於同樣的範疇者是工程上的動畫, 例如電荷在已知磁力場 (或電力場) 運動所產生的磁力場 (或電力場) 變化, 是經由解微分方程式獲得。在這些應用上, 通常可以找到 α , 其 $\xi = 1$ 。比較困難的動畫是屬於具有 "表情" 的連環畫 (或卡通), 因為它幾乎沒有規律可進行, 完全是一種欣賞力的昇華, 可找到的 α 在大部份的情況下, 其 $\xi < 1$, 本文的重點則是針對這種具有表情之動態畫做一番探討。

靜態畫之表示法

圖形的數學表示法有很多種, 目前一致公認, 對於任意的圖形似宜採用參數來表示。

[5, 6], 例如圖二 (a) 或 (b) 的圖形是一筆勾劃所形成, 由於線上的每點皆有先後的順序, 所以唯有用參數 t 表示筆動的順序, 每點用座標值 $[x(t); y(t)]$ 表示, 才能用向量函數表示任意的曲線形狀。

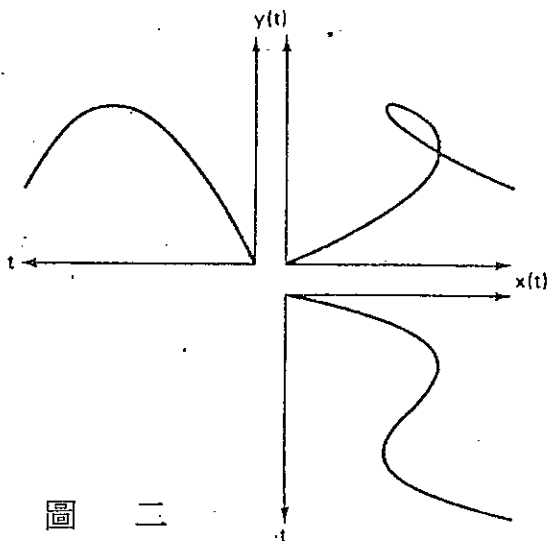


圖 二

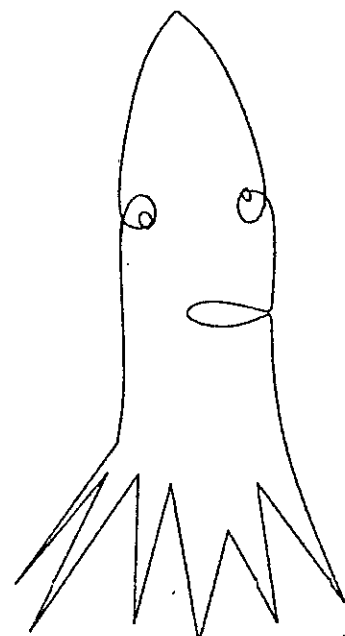


圖 三

古典的內插多項式逼近，例如 Lagrange, Hermite, ... 等，皆是考慮近似曲線通過已知數據點的情形，這些方法在電腦動畫的應用上有二項主要的缺點：(1) 任何一個數據點的更動，會使原先的曲線形狀產生大幅度的變化，缺乏可調整性，不適宜用在人機交談式的作業上，(2) 曲線上的數據點應選那些點，使用人無法預知，即使他心中有一曲線形狀的圖樣，他也不知怎樣輸入電腦，特別在很多實際應用裏，曲線上的點座標不是已知的，典型的例子是寫生畫，畫家在勾劃一條曲線時，他心中所想的是它的形狀，而不是它所通過的數據點，因此，若只要電腦產生圖樣的形狀時，古典的曲線逼近法就不適用。

最早提出利用控制點產生曲線形狀比較成功的方法是 Bézier 多項式 [7]，任一 Bézier 曲線的形狀是由一個素描多邊形所控制，因此，圖形可經由調整其素描控制點的位置獲得。

Bézier 多項式的理論基礎是採用 Beinstein 多項式近似法，它只是將 Beinstein 多項式 [8] 展開式的各項係數改用素描控制點的位置，因為 Beinstein 近似式的基底函數 (Basis Function) 是屬於凸集組合 (Convex Combination)，所以 Bézier 曲線被限圍於由素描控制點所形成的凸集殼 (Convex Hull) 裏，而且逼近素描多邊形的形狀。這種方法的重大優點是圖形可經由素描多邊形產生，而且可隨意修改圖形 (經由增添，移動，或刪除素描控制點改變素描多邊形中獲得)，使用人可以完全不必瞭解數學的理論，也可以操縱自如地將任意形狀的曲線輸入電腦。

Bézier 多項式逼近素描多邊形的缺點是它為高次多項式近似，近似多項式會隨著素描控制點數的增加而增高，這樣會使得修改圖形比較困難，因為移動 (或添增或刪除) 一素描控制點會影響到整個曲線的形狀，它缺乏局部修正的能力。若欲改進這項缺點，唯一的方法就是摒棄 Beinstein 基底函數，而改用低次多項式，但必需保持整段曲線的平滑性，在這種條件下，最適宜的方法可能是採用軟楔函數 (Spline Functions) 近似，同樣的道理，吾人亦需將軟楔函數改頭換面，用參數表示的基底函數，用素描控制點當做展開式中的係數，讓我們稱這樣的曲線為 B 軟楔曲線 [9]，B 軟楔曲線是由低次多項式所連接而成 (但保持整條曲線是某種程度的連續)，所以當移動一素描點時，只會造成局部的影響，而不會影響到更遠軟楔線段的形狀。

有關 B 軟楔函數近似的理論請讀者詳閱 [9]，本文僅將需要的公式及其幾何特性提出來討論。令 $x = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ 為一實數的向量，其中 $x_i \leq x_{i+1}$ ，則一個函數 P 稱為 $m-1$ 次軟楔函數若它滿足下面的二個條件

- (1) 在每個區間 (x_i, x_{i+1}) 是 $m-1$ 次的多項式，
- (2) $P \in C^{m-2}$

令 $S(m, P)$ 表示所有 $m-1$ 次軟楔函數所存在的 $m+k-1$ 次元空間，則在所有可能當做的基底中，我們有興趣的是 B 軟楔基底。令向量點 $\{v_i\}$ 為一素描多邊形 C 的端點 (或稱為素描控制點) 以及 $\phi_{i,m}(s)$ 為在區間 $(x_i, x_{(i+m \bmod n)})$ ， $i = 0, 1, \dots, n-1$ 的 $m-1$ 次 B 軟楔基底函數，則對應素描多邊形 C 的 $m-1$ 次 B 軟楔曲線是由下式決定

$$P_{m-1}(C) = [x(s), y(s)] = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \phi_{i,m}(s) \quad (1)$$

其中基底函數 $\phi_{i,m}(s)$ 可由下面的遞迴函數 [10] 求得

$$\phi_{i,1}(s) = \begin{cases} 1, & \text{當 } x_i \leq s \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_{i,m}(s) = \frac{s - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} \cdot \phi_{i,m-1}(s) + \frac{x_{i+m} - s}{x_{i+m} - x_{i+1}} \cdot \phi_{i+1,m-1}(s),$$

當 $m > 1$. (2)

吾人不難證明 (2) 式具有凸集組合的特性，亦即

$$\sum \phi_{i,m}(s) \equiv 1$$

而且它是 $m-1$ 次的低次多項式，換言之，這樣的選取滿足了改善 Bézier 多項式缺陷的要求。為了便於計算，我們選取一組特殊的區間：令 $(x_{i+k} - x_i)/(x_{i+1} - x_i) = k$ 以及取參數 $u = (s - x_i)/(x_{i+1} - x_i)$ 使得 $u \in [0, 1]$ 而且各區間的點數是均勻分佈的，若取 $m=4$ 則上式可化簡成下面的矩陣表示式

$$P(u) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \\ v_{i+2} \\ v_{i+3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 $t = FR(ku) = ku$ 的小數部份
 $i = INT(ku) = ku$ 的整數部份
 $k = \text{總共的軟楔段} = n-3$
 $u \in [0, 1]$

上式稱為「均勻三次 B 軟楔函數」，它的向量值是由素描控制點 $\{v_i\}$ 決定，它的形狀和素描控制點間的關係可解釋如下：

當上式取 $t=0$ 時，就得下式

$$p = \frac{1}{6} (v_i + 4v_{i+1} + v_{i+2}) \quad (4)$$

其微分式則得

$$P' = \frac{1}{2} (v_{i+2} - v_i)$$

以及

$$P'' = v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2}$$

從向量分析的幾何表示法知，以上三式可用圖三表示它們的關係，我們稱P點為"1/3點"，因為它在三角形 $\overline{v_i v_{i+1} v_{i+2}}$ 裏的位置是在靠近頂點 v_{i+1} 所引出中線之 1/3長度的地方。所以，吾人很容易從已知的素描多邊形想像出它所對應之B軟楔曲線的形狀。例如從圖四的素描控制點知B軟楔曲線的起點會通過1點（因為 $\overline{012}$ 的三角形退化成一條直線，故1點通過此線段的中點），從 $\overline{123}$ 三角形可決定其1/3點，而使得1點和此1/3點間是一條三次曲線，而且其首尾點的斜率和彎曲方向分別可從對應的三角形獲知，如此繼續觀察每個連續的三角形，則可將整條B軟楔曲線的形狀勾劃出來。

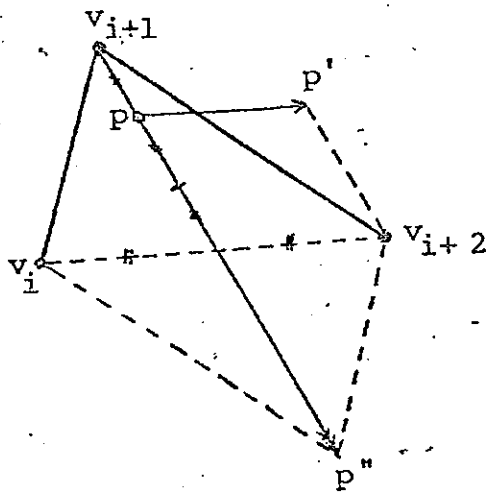


圖 四

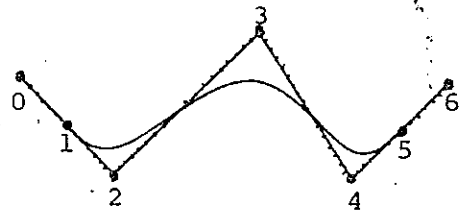


圖 五

均勻B軟楔曲線除了容易從素描多邊形獲知其形狀外，最重要的特點是其表示法非常適合於"交談式電腦圖形" (Interactive Computer Graphics) 的作業，圖形交談式作業的目的乃欲稍微修改局部圖的形狀，由於均勻三次B軟楔的基底函數是低次的多項式，稍微移動（或刪除或增添）一個素描控制點，所影響者僅是局部的形狀，這種情形可用圖五顯示。它的另一項重要的特點是它可以產生任何形狀的圖形，即使是有尖點的圖形，雖然從直觀上言，在尖點上曲線是非C'連續，但從均勻B軟楔表示式中，只要吾人在尖點上連續給三個相同的素描控制點（亦即三角形退化成一點），則在計算上通過該點仍然是連續，因此，有尖點的圖形亦是使用相同的計算式，這種情形可用圖六顯示。

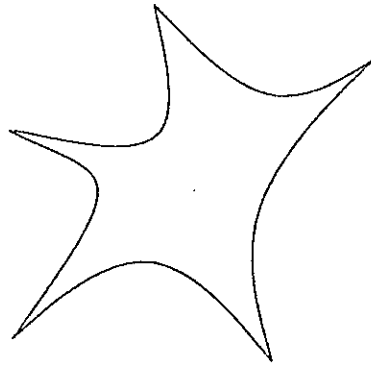


圖 六

B 軟楔曲線間之朦朧相似性

令 s^i 表示對應素描多邊形 c^i 的 B 軟楔曲線， s^f 為對應 c^f 的 B 軟楔曲線，由電腦動畫的定義知，從靜態畫 s^i 變化至 s^f 的單動作是一個映像 $M(t) : s^i \longrightarrow s^f$ ， $t \in [t_i, t_f]$ ，其中 $M(t_i)s^i \equiv s^i$ ， $M(t_f)s^i \equiv s^f$ ，則任何二個相鄰的 $M(t)s^i$ 若 "非常" 相似，那麼我們可以保證此單動作是 "相當" 平穩的變化 (參閱圖七)。在這裏我們用了朦朧的描述句，二個圖形非常相似是什麼意思？電腦怎樣瞭解它？以下我們提出朦朧集合論裏最基本的定義，更詳盡的解說請參閱 [11]。

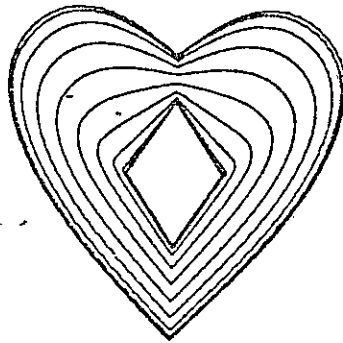


圖 七

令 U 表示一個單動作裏所有可能產生之 B 軟楔曲線的集合，則一個 U 的 "朦朧子集合" (Fuzzy Subset) 是由一個 "會員函數" (Membership Function) $\mu_Z : U \longrightarrow [0, 1]$ 來訂其特性，亦即對於 U 的每個元素 ζ (任一可能產生的 B 軟楔曲線) 有一個數值 $\mu_Z(\zeta) \in [0, 1]$ 來表示 ζ 在 Z 的會員等級。我們說 $S_U(\zeta)$ 是朦朧子集合 Z 的 "支持" (Support)，如果它可用下式表示

$$S_U(\zeta) = \{\zeta | \zeta \in U \text{ 以及 } \mu_Z(\zeta) > 0\}$$

上式意味着朦朧子集合 Z 可表示為

$$Z = \{ \mu_Z(\zeta) / \zeta \mid \zeta \in S_U(\zeta) \} \quad (6)$$

對於任二個在 U 的 B 軟楔函線 ζ 和 η 間之 "朦朧關係" (Fuzzy Relation) R 亦是用一會員函數 $\mu_R(\zeta, \eta)$ 訂其特性，所以它是 Cartesian 乘積 $U \times U$ 的朦朧子集合，可表示如下

$$R = \{ \mu_R(\zeta, \eta) / (\zeta, \eta) \mid \zeta, \eta \in U \} \quad (7)$$

以下我們討論一種在特殊狀況下建造之 B 軟楔曲線群的朦朧關係，這項觀察對於發展一套動態畫演算法有甚大的助益，關於更複雜的一般狀況則留待曲線整順一節加於探討。今

$C = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ 其中 $v_0 = v_n$ ，為了方便用數學式表示，假設我們採用 Einstein 基底函數 (亦即 B 軟楔曲線是由一條 Bézier 高次多項式所形成)，則對應 C 的曲線是由下式決定：

$$\sum_{k=0}^n v_i \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1]$$

從集合論知 $\bar{C} \subseteq C$ 可表示為

$$\bar{C} = \{ v_i \mid \eta_i \}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$\eta_i = 1$ 表示 v_i 在 \bar{C} 內， $\eta_i = 0$ 表示 v_i 不在 \bar{C} 裏，假設素描多邊形 \hat{C} 是比 \bar{C} 多取一個 C 的素描點所構成，則對於每個這樣的 \hat{C} 吾人可用 \bar{C} 置換 \hat{C} 繼續建造新的 \hat{C} ，直至 $\hat{C} \equiv C$ ，換言之，從一個 \bar{C} 開始到 C 間有許多的 \bar{C} 和 \hat{C} ，我們想探討的問題是：它們和對應 C 之曲線形狀間的朦朧關係是怎樣呢？以及它們彼此之間的朦朧關係又是怎樣呢？

從朦朧集合論的觀點看，吾人可將 C 所決定的曲線形狀看成 "標準形狀" (Standard Shape)，則每個 \bar{C} 所決定的曲線形狀是分別由其會員函數 μ_i ， $\mu_i \in [0, 1]$ ，訂定其特性，而 $\mu = 1$ 是對應 C 所決定之曲線形狀的會員函數，則令

$$\mu_k = \max_t \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0, 1]$$

因為當 $k = n$ 時， $\mu_n = 1$ ，而對於 $k < n$ 者，則 $0 < \mu_k < 1$ ，所以我們可用下式表示朦朧子集合 "標準形狀"

$$\text{"Standard Shape"} = \{ \mu_k / \bar{C} \mid \mu_k = 1 \quad \text{if } \bar{C} \equiv C \quad \text{and}$$

$$\mu_k = \max_t \left\{ \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \text{if } \bar{C} \subset C \right\} \quad (8)$$

其中 k 表示 \bar{C} 總共的素描點 (亦即 $|\bar{C}|$)。換言之, 當 C 的所有素描點皆被取時, 則它所決定的曲線形狀 "一定" 是最標準的, 若僅有的部分素描點被取時, 則它們所決定的曲線形狀到底 "標準" 到何種程度是由其會員函數所決定, 藉着這樣的表示法, 吾人可以將一個抽象的形狀用數值表示, 而讓電腦可以處理。

令 \bar{C} 和 \hat{C} 所決定之曲線形狀的標準性是分別由它們的會員函數 $\bar{\mu}$ 和 $\hat{\mu}$ 訂定, 則二條曲線形狀的 "相似" (Similar to) 是一種朦朧關係, 這種相似的朦朧關係可由一個會員函數 $\mu(\bar{C}, \hat{C})$ 訂定其特性, 從直覺的觀點看, 它可以表示如下

$$\text{"Similar to"} = \{ \mu(\bar{C}, \hat{C}) / (\bar{C}, \hat{C}) \mid \mu(\bar{C}, \hat{C}) = \min\left(\frac{\bar{\mu}}{\hat{\mu}}, \frac{\hat{\mu}}{\bar{\mu}}\right) \} \quad (9)$$

由於增加素描點會使 $\bar{\mu}$ 和 $\hat{\mu}$ 值的差距拉大, 而使得二者間所決定的曲線形狀愈不像, 這種相似程度的降低可從圖八看出。從此例中, 吾人可以發現一項重要的現象: 相同形狀的二個素描多邊形, 若它們的素描點數不一致, 則會產生二個形狀不像的 B 軟楔曲線, 反之, 二個形狀不一樣的素描多邊形會不會產生相同形狀的 B 軟楔曲線呢? 答案是肯定的, 因為從近似理論, 我們知道在某種誤差的限度下, 一條曲線的形狀可用其上不同組合的點群表示, 二個不同組合的點群, 經過均勻 B 軟楔反函數的過程, 就得二個不同形狀的素描多邊形, 而它們所決定的 B 軟楔曲線形狀却是一致的, 這種情形可從圖九看出。

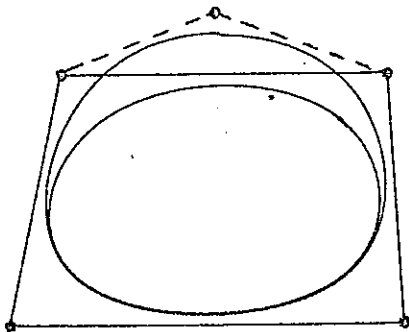


圖 八

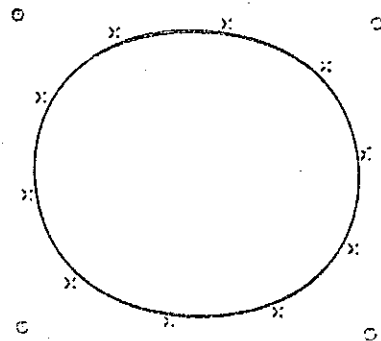


圖 九

動態畫產生法

令 $C(S^i)$ 和 $C(S^f)$ 分別表示單動作的第一張和最後一張圖形 S^i 和 S^f 的素描多邊形，則動態畫產生的演算法乃欲在 $C(S^i)$ 和 $C(S^f)$ 間產生素描多邊形移動的軌跡，通常二個素描多邊形的素描點數並不一樣多，亦即 $|C(S^i)| \neq |C(S^f)|$ ，因此，為了決定它們之間的 "移動軌跡" (Moving Paths)，第一步的工作就是要轉換單動作的首尾二個素描多邊形，使它們具有相同的素描點數。為方便討論計，令 $|C(S^i)| < |C(S^f)|$ ，則從上節的討論知，吾人不能直接在素描多邊形 $C(S^i)$ 的邊上增加素描點，因為那樣會使 S^i 完全變形，唯一的方法是透過均勻 B 軟楔反函數的過程來決定一個新的素描多邊形，它和 $C(S^f)$ 具有相同的素描點數，而且它決定的曲線形狀和 S^i 一致。

令 $|\tilde{C}| = \max(|C(S^i)|, |C(S^f)|)$ ，則均勻 B 軟楔反函數的過程包括二個步驟 (以下我們僅討論封閉 B 軟楔曲線的情形)：(一) 在曲線 S^i 上尋找數據點群，它們將 S^i 均分成 $|\tilde{C}|$ 段，亦即找出 $S^i(t_k)$ ， $t_k = 0, 1/|\tilde{C}|, 2/|\tilde{C}|, \dots, (q-1)/|\tilde{C}|, 1$ ，假設這些數據點分別是 $P_0(0), P_1(0), \dots, P_{q-1}(0)$ ，其中 $q = |\tilde{C}|$ ，而 $P_0(0) = P_{q-1}(1)$ ，則從 (4) 式知，這些點滿足以下的線性系統方程式

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & & 1 \\ & 1 & 4 & & & & & \\ & & & 1 & 4 & & & \\ & & & & & 1 & 4 & \\ & & & & & & & 1 & 4 \\ & 1 & & & & & & & & 1 & 4 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{q-2} \\ v_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(0) \\ P_1(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{q-2}(0) \\ P_{q-1}(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

(二) 從 (10) 式解得新的素描點群 $\{v_i\}$ ， $i=0, 1, \dots, q-1$ ，令此素描多邊形為 $C(S^i)$ ，則在直觀上 \tilde{S}^i 的曲線形狀和 S^i 是 "非常" 相似，因為它是從近似法 [12] (逼近 S^i) 中求得的。

以下讓我們假設 $C(S^i)$ 和 $C(S^f)$ 已經具有相同數目的素描點，則動畫演算法的第二件工作就是要將二者的素描點互相匹配，以產生素描點移動的軌跡，由於我們所要處理的是多邊形的端點，所以這件工作並不困難。首先，我們將二個多邊形的重心分別求出，將面積較小者套入面積較大者，並使二者的重心在同一點，為方便討論，我們假設 $C(S^i)$ 的面積大於 $C(S^f)$ ，因此， $C(S^f)$ 被套入 $C(S^i)$ 內，我們用 $C(\tilde{S}^f)$ 表示平移 $C(S^f)$ 後的素描多邊形，於是 $C(S^i)$ 和 $C(S^f)$ 素描點的配對是藉著匹配 $C(S^i)$ 和 $C(\tilde{S}^f)$ 的素描點來完成 (注意： $C(S^i)$ 和 $C(\tilde{S}^f)$ 不一定要相互包含)。

今素描點 v_k 是 $C(S^i)$ 中最具影響形狀的控制點，換言之，刪除它會使曲線形狀產生最大的變化者 (或產生最不相似的形狀) [13]，我們稱素描點 v_k 是 "媒婆" (Match-

Maker，一種尋找媒婆的簡易法是這樣的：若 $C(S^i)$ 有尖點，則取其中一點當媒婆，若無，則取對應反函點的控制點當媒婆，若仍無反函點，則任取一點當媒婆，一旦在 $C(S^i)$ 決定那點當媒婆後，就需在 $C(\tilde{S}^f)$ 找到媒公，媒公的找法如下：令 $v_j \in C(S^i)$ ， $\bar{v}_k \in C(\tilde{S}^f)$ ， $j, k = 0, 1, 2, \dots, m$ ，則媒公 \bar{v}_ℓ 滿足

$$T(\bar{v}_k, \bar{v}_\ell) = \min_{0 \leq k \leq m} \{ T(v_h, \bar{v}_k) \} \quad (11)$$

其中 T 是一種測度值，我們所採用的測度法是這樣的：先在 $\{\bar{v}_k\}$ 中找距離較靠近 v_h 者（譬如說取一半 $C(\tilde{S}^f)$ 的素描點），再用 $\{v_h\}$ 的平分角線和這些素描點的平分角線分別求得的夾角，當做測度值 $T(v_h, \bar{v}_k)$ 。

一旦媒婆和媒公決定後，則可按順序成批匹配，依順時針的方向配對成 $(v_{h+1}, \bar{v}_{\ell+1})$ ， $(v_{h+2}, \bar{v}_{\ell+2})$ ， \dots ， $(v_{h-1}, \bar{v}_{\ell-1})$ ，就完成了匹配的工作，圖十示出紅心和鑽石的匹配。

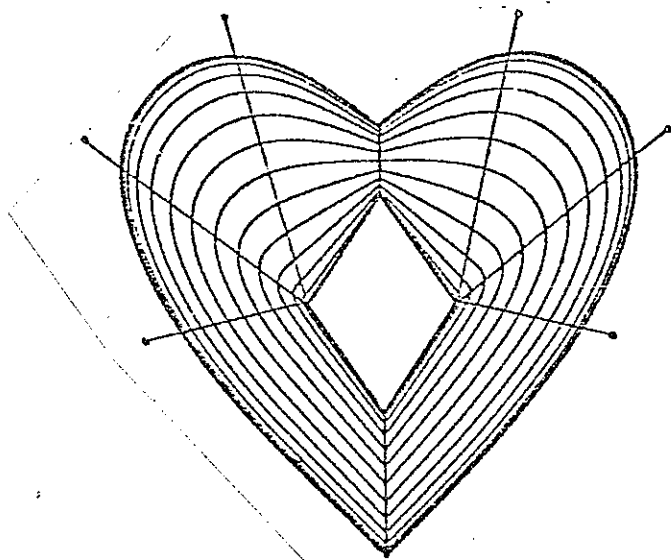


圖 十

素描點匹配完成後，動畫演算法的第三項工作就是要決定它們彼此之間的行進軌跡，為方便說明計，讓我們參看圖十一。令 $O(S^i)$ 和 $O(S^f)$ 分別表示多邊形 $C(S^i)$ 和 $C(S^f)$ 的重心，則行進軌跡是從二個多邊形對它們的重心“稍微” (A Bit) 收縮或放大來完成，這樣就決定了行進軌跡首尾點的位置和其上的斜率，有了這些條件就可決定一條三次的曲線，但是為了將來可容許朦朧指令調整行進軌跡的形狀，我們採用了如圖上所示的均勻 B 軟楔曲線，每條這樣的曲線是由七個控制點定其形狀，這七點的選法是：第 2 點（或第 4 點）是稍微收縮（或放大）第 1 點（或第 5 點）所決定，而第 0 點（或第 6 點）是取曲線起點（或終點）是第 1 點（或第 5 點）的 B 軟楔控制點，它的長度和稍微收縮（或放大）等長，第 3 點是用來控制行進軌跡的形狀，它的選取需經過特別的考慮。

為了避免相鄰兩個 B 軟楔曲線疊交在一起而產生不自然（扭曲）的動畫（如圖十二），第 3 點的選取必需限制在某一個範圍，從 B 軟楔曲線的特性知，這個範圍就如圖十一上所示的 A，又從觀察知，最不可能產生動畫扭曲的選擇是取三角形 $\overline{123}$ 和 $\overline{345}$ 的面積和為極小者

，所以我們就取具有此項性質的第3點當做起始的選擇，若有必要，再做朦朧程式的微調，因此動畫演算法的第四項工作就是要提供怎樣調整第3點位置的朦朧程式。

從朦朧邏輯論的觀點言，朦朧指令是一種“騎牆語言”(Linguistic Hedge)，在此處我們所用的朦朧指令不外乎：向東(東南，南，西南，西，西北，北，東北)稍移，更進一層的騎牆語言是：大概(或許)(有點)向東等，所以這種朦朧程式的設計並不難。從圖九知第3點所存在的範圍是A，“稍移”(Move Bit)第3點是A的一個朦朧子集合，它的會員函數可以用一種類似“費氏搜尋”(Fibonacci Searching)來訂定其每次跨步的長度，圖十三示出我們所採用的“朦朧程式”(Fuzzy Program)，有關朦朧程式的定義請參閱[13]，此處不再重述。圖十四示出未經朦朧指令調整的一張動畫，圖十五示出它經朦朧程式處理後的結果(僅修飾一處)。

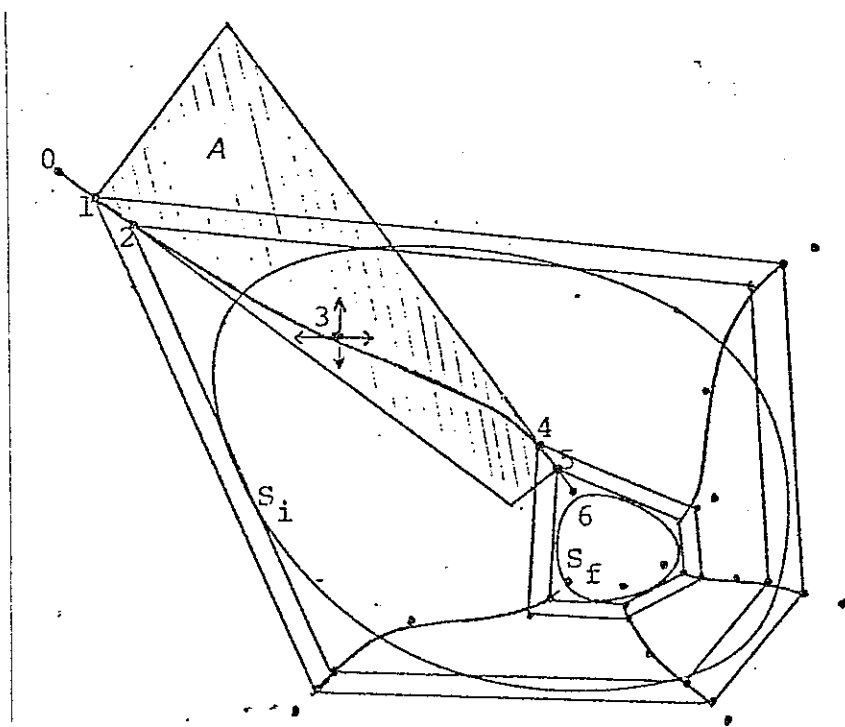


圖 十一

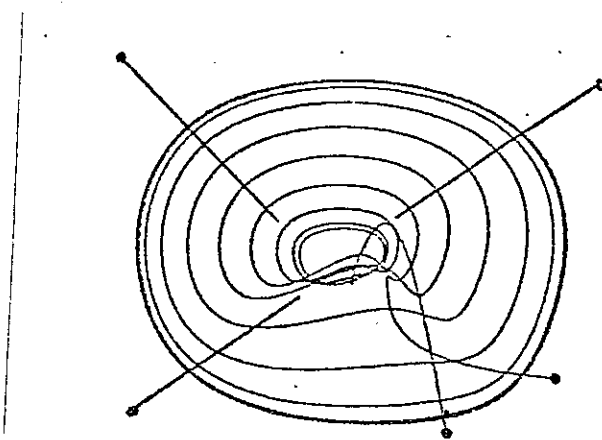


圖 十二

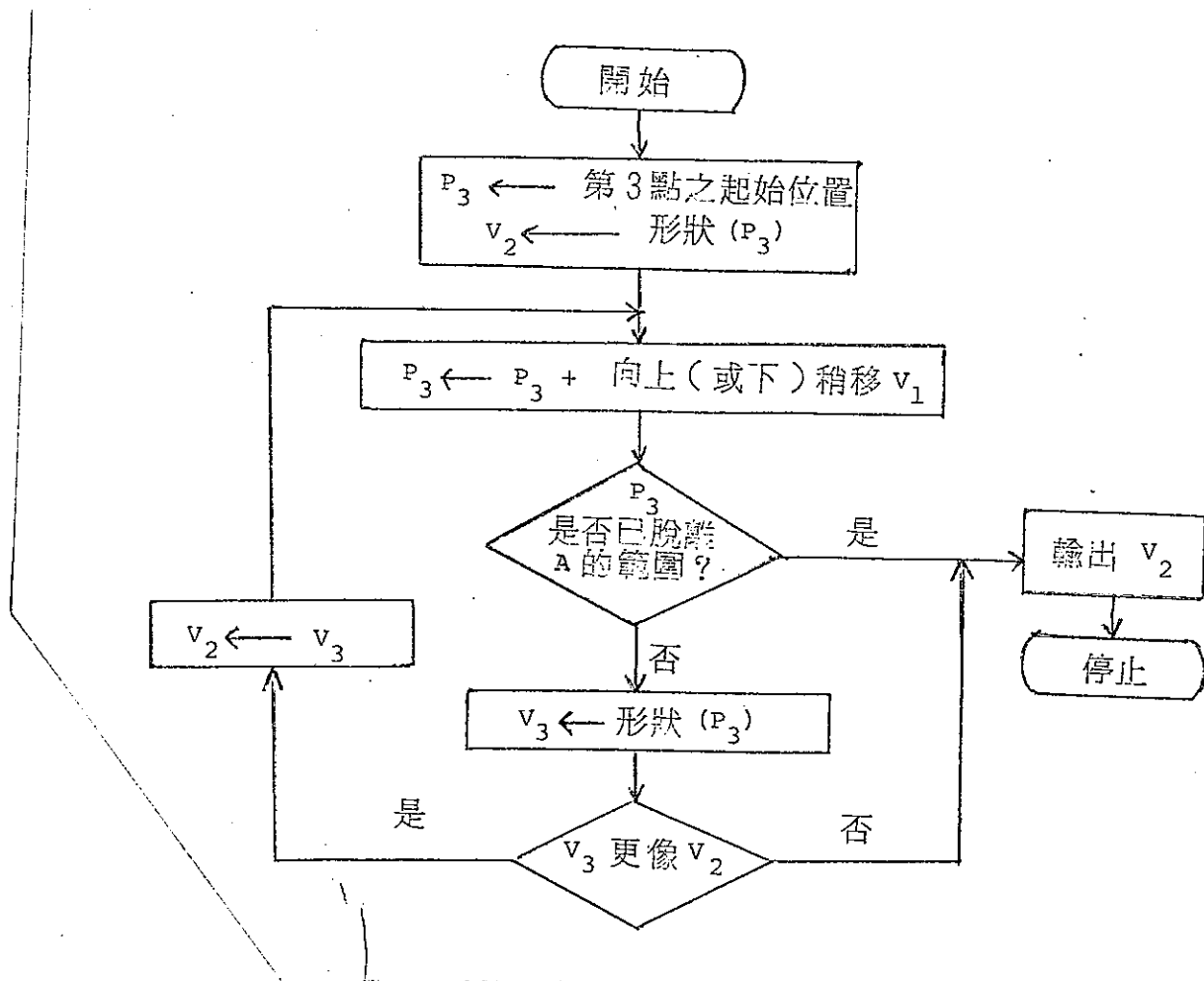


圖 十三

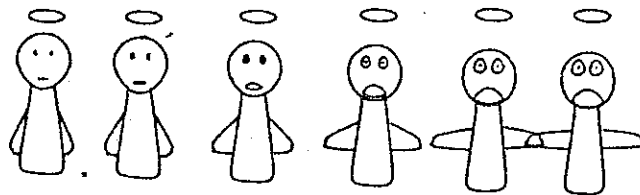


圖 十四

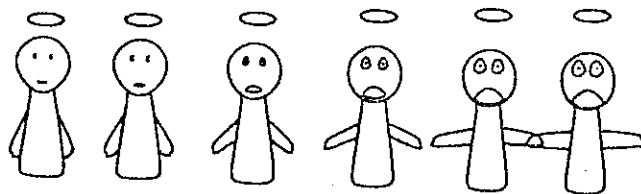


圖 十五

以上我們所論及的動畫產生法僅是最基本的部份，事實上，為了使動畫更為逼真，動畫系統必需提供更多可供朦朧指令調整的程式，例如提供控制素描點行進速率變化的朦朧指令，就可使動畫產生高階表情顯像的形態，所以在設計交談式的程式時，就可納入類似如下的指令：

SPEED(Located by Cursor) = Bit Fast, ..., etc.

還有一點值得一提的是，上述的動畫產生法並不能產生經幾何變換的動畫，換言之，如圖十六的動畫必需另外處理，所以動畫系統的主程式應具有如圖十七所示的結構。

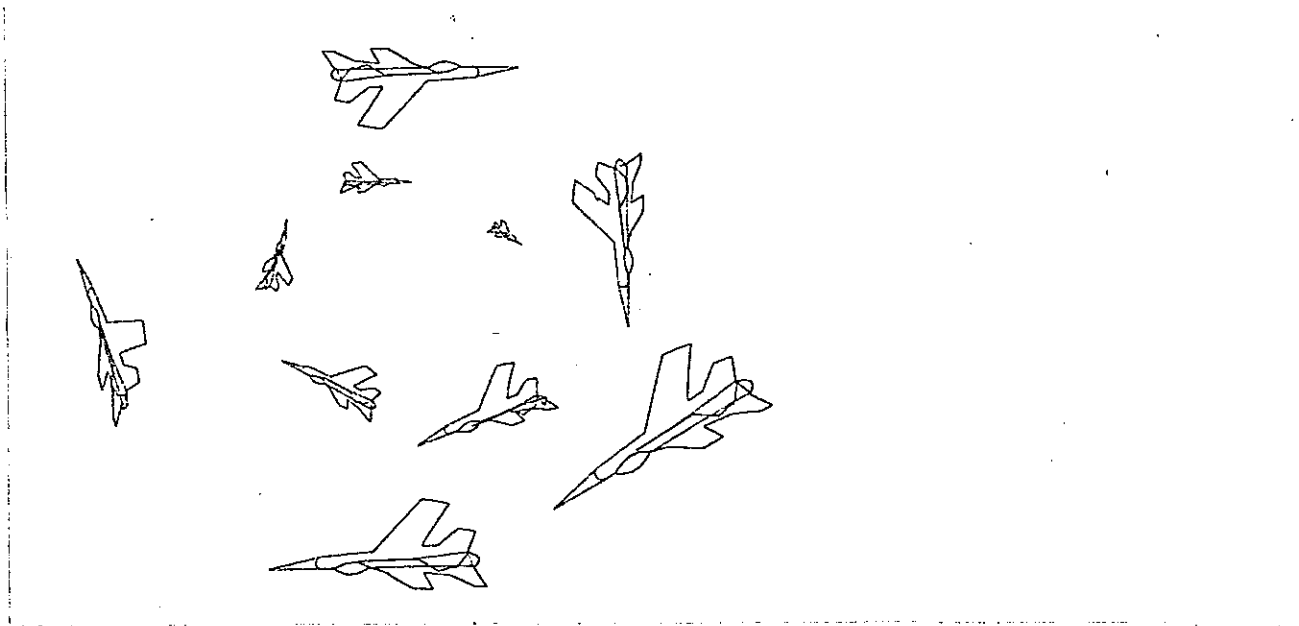


圖 十六

動 畫 的 一 些 實 例

在本節裏，我們將顯示二、三個例子當做示範，它們是由不懂得上述理論的人所建造的，而他只是單動作的前後二張畫，其他的皆由動畫演算法自動產生，圖十八示出將中文字：“人”塗黑，當然，吾人很容易就可聯想到，這樣的演算法不但可以在螢光幕上顯示毛筆字的真蹟，而且可以用來彫刻中文字模，進一步地說，它可以放在“數值控制機”(Numerically Controlled Michine)裏當彫塑任意形狀的模子用。圖十九和圖二十分別示出這種動畫演算法在卡通製作上的應用，吾人可以看出從生氣樣子到快樂的兔子是怎樣地轉變其表情，或者頭上正在長癩的痛苦表情，而可窺知這種動畫演算法的實用性(事實上，這些動畫尚未經朦朧程式處理)。

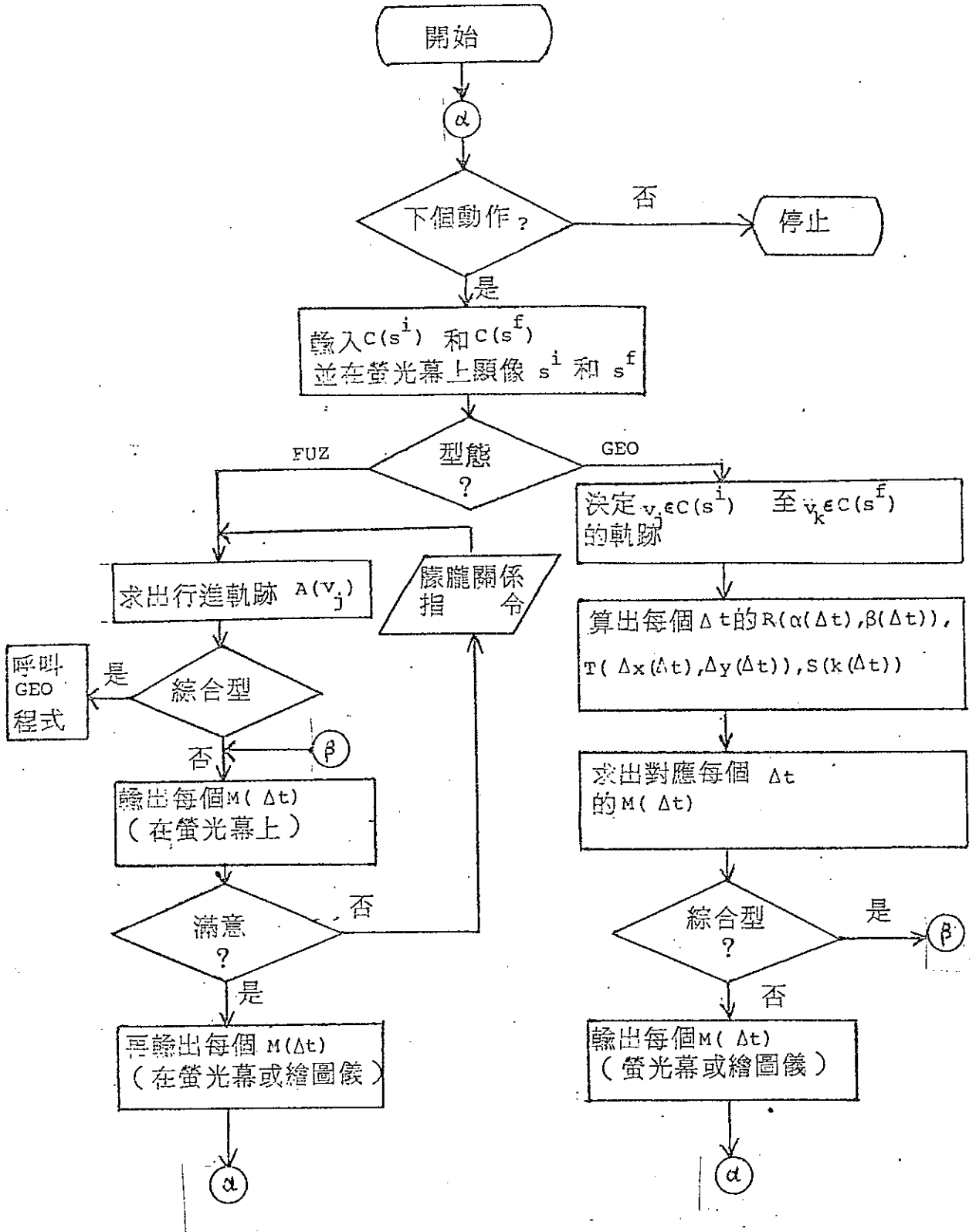


圖 十七

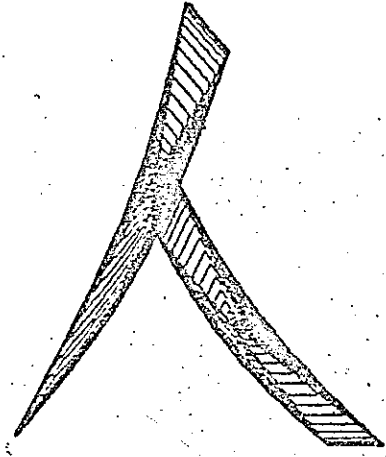
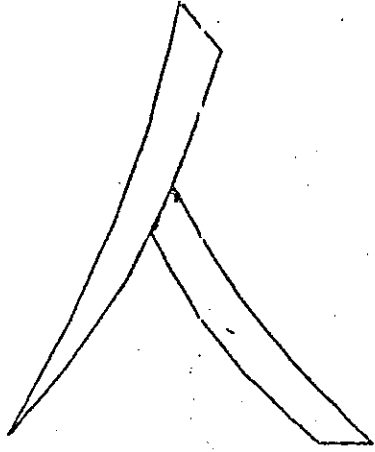


圖 十八

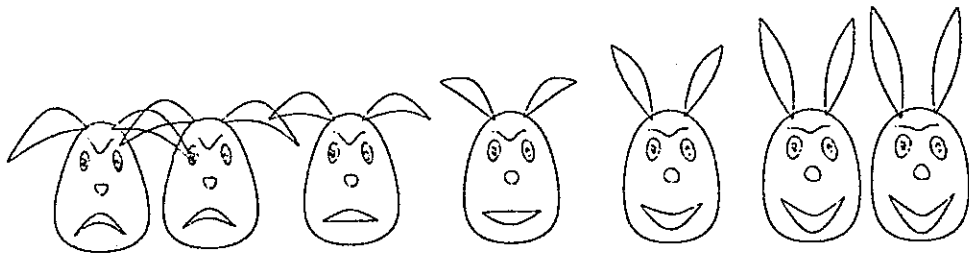


圖 十九

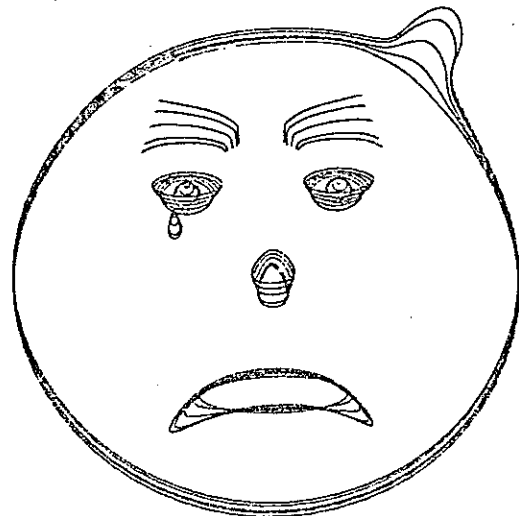


圖 二十

曲線整順

本節討論曲線整順的目的有二：其一是尋找好的曲線整順法在電腦協助船殼（或車殼等）外形設計的軟體系統中是項重要的課題 [14]，此處我們將提出一項發現：利用電腦動畫的觀念可獲曲線整順的新方法。其二是藉着對曲線整順問題的探討，希望能整理出一種可供測度二個B軟楔曲線相似程度的新方法。

曲線整順的問題是屬於判別曲面粗糙程度的一種測度，它和使用人的“直觀”(Perception)有關，當一條曲線呈現在我們面前時，也許我們可以說出那個部份是比較凹凸不平的，但是我們怎樣去計算這種現象的程度值？換言之，怎樣設計一套電腦的程式可以計算出一條曲線各個部份凹凸不平的值？怎樣從二條曲線中判別那一條較為平滑？如果這些問題可迎刃而解的話，則電腦協助曲線（或曲面）整順的方法當更具功效（較為自動化）。

判別二條曲線的平滑性可用圖廿一說明：我們是用一個事先訂好的網狀小方格做襯底（網狀的小方格分得愈細則測度愈準確），令A曲線和B曲線分別和網狀的水平與垂直線總共的交點數為 σ_A 和 σ_B ，則我們說A曲線較B曲線平滑若 $\sigma_A < \sigma_B$ ，反之亦然。

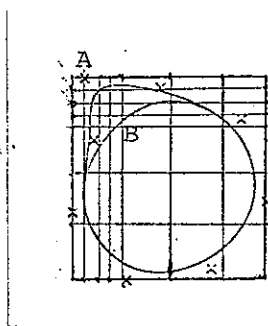


圖 廿一

這樣的定義和電腦動畫的觀念有何關連？當吾人發現某一部份是凹凸不平時，則磨平此部份的過程本身就是一種動畫，這種情形可從圖廿二的例子看出。從這個觀點出發，不難發現：將曲線上的某點磨得最平時，就是將對應此點的素描控制點去除，使素描多邊形在該點缺角（亦即少一邊線）。所以計算一條曲線各個部份凹凸不平的程度值可用下述的方法：令 $\{v_i\}$ ， $i=0, 1, \dots, n-1$ 是一條封閉B軟楔曲線的素描點，則測度 v_i 對曲線形狀的影響是先將 v_i 從 $\{v_i\}$ 去除，用剩下的素描點求得另一條B軟楔曲線（磨平後的曲線），然後用前後二條曲線之網狀格子的交點數相減，所得的值即是 v_i 對曲線形狀影響的程度值，如果我們把每個素描點都做一次同樣的處理和計算，則可以算出每個素描點各別對形成一條曲線形狀的貢獻值，將這些值從大而小依序“重排”(Sorting)，就可知曲線在何處是最凹凸不平了。

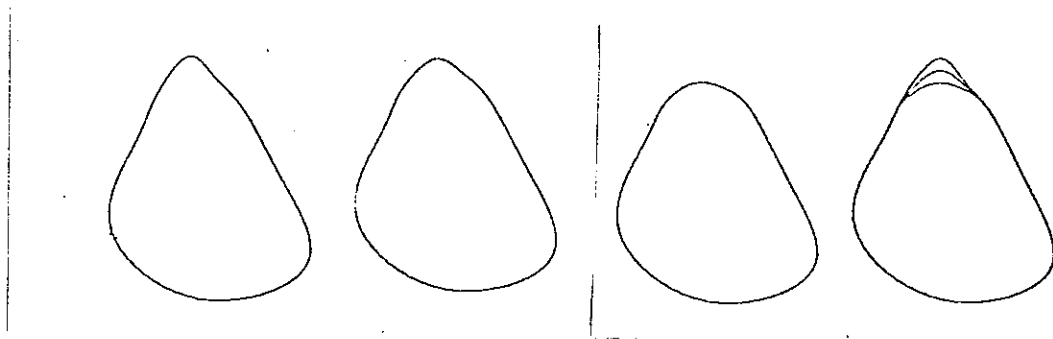


圖 廿二

無疑地，利用電腦動畫的觀念設計曲線整順的演算法可以滲入朦朧集合論的方法，而使系統更具效能：使用方便和大幅度地減少"人機互作用" (Man-Machine Interaction) 的時間。從以上的線整順問題的討論，吾人不難找出一種可度量二條B軟楔曲線相似程度的方法，因它牽涉到圖形"加碼" (Encoding) 的理論探討，故不擬在本文中繼續討論，有興趣的讀者請參閱 [15]。

結 論

本文的主要貢獻計有：(一) 提出電腦動畫問題的數學定義，(二) 提出一種有效解答電腦動畫問題的新方法，(三) 提出怎樣將電腦動畫的觀念應用到圖形整順和圖形相似等直觀問題的定量上。探討這些論題的主要工具：數學的理論基礎是以B軟楔函數的特性為主，"人造智慧" (Artificial Intelligence) 的原則是依據朦朧集合理論，圖形系統是配合靜態和動態的圖形顯像法。從本文的探討可獲致一項重要的結論：電腦動畫的建造用程序化 (Procedurewise) 的圖形高階語言寫程式是可行的，這項結論也正是我們將來對有關電腦動畫系統的研究重點。

參 考 資 料

1. Burtnyk, N., and Wein, M. "Interactive Skeleton Techniques for Enhancing Motion Dynamics in Key Frame Animation," Comm. ACM, pp.564-569, Oct.1976.
2. Badler, N. I., and Smoliar, S. W. "Digital Representations of Human Movement," ACM Computing Surveys, vol.11, No.1, pp.19-38, March 1979.
3. Potter, T. E., and Willmert, K. D. "Three Dimensional Human Display Model," Computer Graphics 9, pp.102-110, 1975.

4. Wein, M. "Computer Animation," in Encyclopedia of Computer Science and Technology, vol.5, Marcel Dekker, New York, pp.397-436, 1977.
5. Forrest, A. R. "Computational Geometry — Achievements and Problems," in Computer Aided Geometric Design, Edited by Barnhill, R. E., et al., Academic Press, pp.17-44, 1974.
6. Giloi, K. W. "Interactive Computer Graphics-Data Structures, Algorithms, Languages," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., pp.154-158, 1978.
7. Bézier, P. "Numerical Control — Mathematics and Applications," Wiley, New York, 1972.
8. Forrest, A. R. "Interactive Interpolation and Approximation by Bézier Polynomials," Computer J., vol.15, No.1, pp.71-79, 1972.
9. Gordon, W. J. and Riesenfeld, R. F. "B-Spline Curve and Surfaces," Computer Aided Geometric Design," Barnhill, R. E. & Riesenfeld, R. F., Eds., Academic Press, New York, pp.1-16, 1974.
10. deBoor, C. "On Calculating with B-Splines," J. Approx.Theory, vol.6, pp.50-62, 1972.
11. Zadeh, L. A. "Calculus of Fuzzy Restrictions," in Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes," Edited by Zadeh, L. A., et al., Academic Press, pp.1-39, 1974.
12. Cheng, K. Y. "On Fuzzy Similarity Relation of B-Spline Curves," Proc. of International Computer Symposium, Taipei, pp.1292-1298, 1980.
13. Chang, S. K. "On the Execution of Fuzzy Programs Using Finite-State Machines," IEEE Trans. on Computers, vol.C-21, pp.241-253, 1972.
14. Cheng, K. Y., and Wu, C. S. "On-Line Construction of Ship Hull Surfaces," Proc. of International Computer Symposium, Taipei, pp.926-947, 1978.
15. Cheng, K. Y.. "On Binary Chain Encoding for Shape Description," Technique Report, Academia Sinica, 1981.